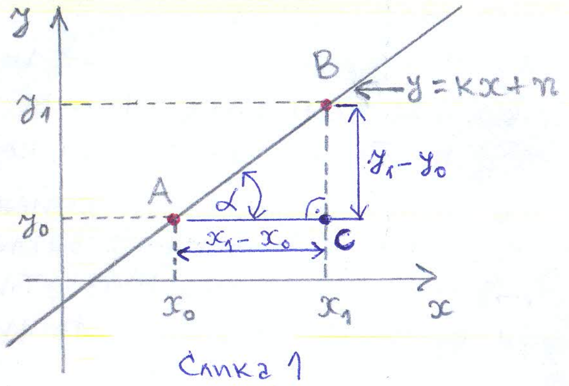
ИЗВОД - предавања

* Проблем тангенте

• Нека су у равни дате две тачке: $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Кроз ове две тачке може се поставити права $y = kx + n$. Нађимо k - коефицијент правца праве. Тачке A и B припадају правој, па зато



Слика 1

координате ових тачака морају задовољавати једначину ове праве.

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= k \cdot x_0 + n \\ y_1 &= k \cdot x_1 + n \end{aligned}\right\}$$

Ако од друге једначине одузмемо прву, добићемо:

$y_1 - y_0 = kx_1 - kx_0$, односно $y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0)$. Одавде следи: $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

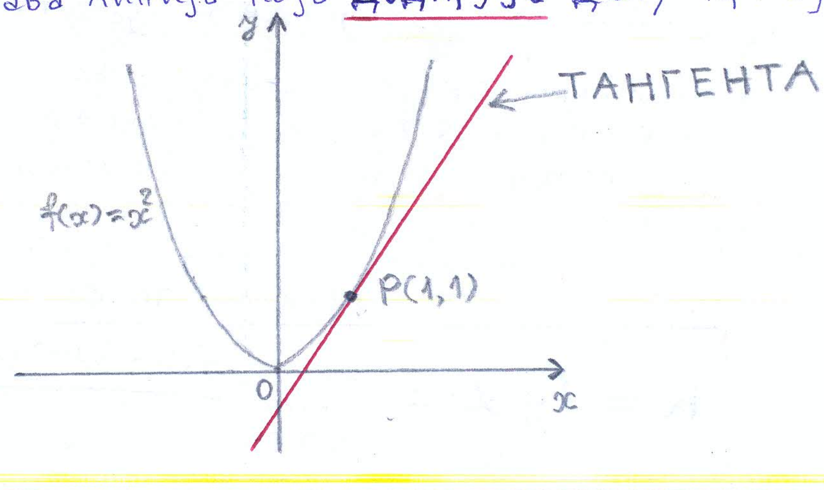
Посматрајмо сада слику 1. Права која пролази кроз тачке A и B заклапа угао α са позитивним смером x осе. Из правоуглог троугла ACB закључујемо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

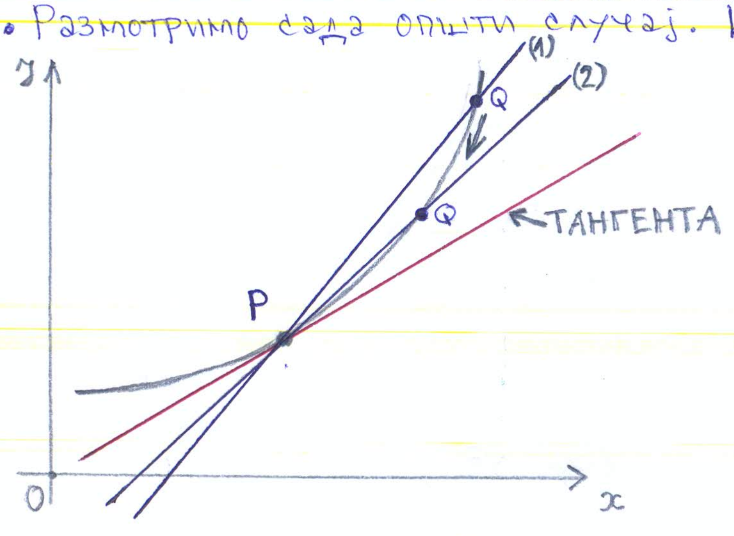
Како је $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = k$, онда је

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} \quad \ldots (*)$$

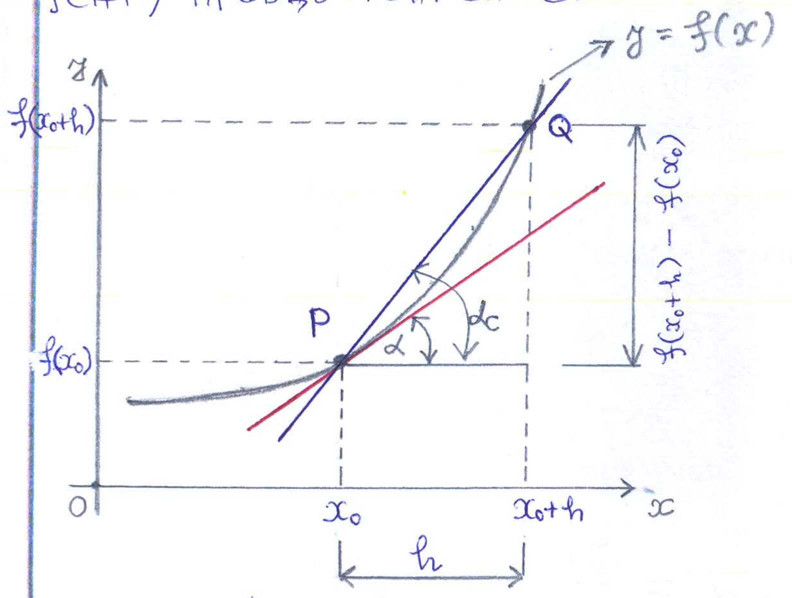
• **Тангента** је права линија која <u>додирује</u> дату криву.



• Размотримо сада општи случај. Имамо криву и тачку P на њој.



Задатак је да нађемо једначину тангенте која пролази кроз тачку P. Праве (1) и (2) су сечице дате криве. Приметимо да што се више тачка Q приближава тачки P, то сечица све више има положај тангенте. Током тог приближавања, угао који сечица заклапа за позитивним смером x осе се све више приближава углу који тангента заклапа такође са позитивним смером x-осе. Другим речима, имајући у виду формулу (*), коефицијенти правца сечица теже коефицијенту правца тангенте.



Слика 2

Посматрајмо опет сечицу која пролази кроз тачку P и кроз тачку Q (Слика 2). Координате тачака P и Q су:

$$P(x_0,\ f(x_0)) \text{ и }$$

$$Q(x_0+h,\ f(x_0+h)).$$

Коефицијент правца сечице је (формула (*)):

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}, \text{ односно}$$

$$k_c = tg\,\alpha_c = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

где је α_c угао који сечица заклапа са позитивним смером x-осе и k_c је коефицијент правца сечице. Када је тачка Q бесконачно близу тачки P, онда сечица прелази у тангенту. Замишљамо да се тачка Q креће по графику функције $y=f(x)$ и тежи да се поклопи са тачком P. То приближавање се може описати са $h\to 0$. Коефицијент правца тангенте рачунамо по формули:

$$\boxed{k = tg\,\alpha = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \quad \ldots\ldots(**)$$

Формулу (**) можемо записати и на други начин. Ако ставимо $x = x_0 + h$, онда је услов $h \to 0$ **исто што** и $x \to x_0$.

Следи:

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \ldots\ (***)$$

Формуле (**) и (***) се могу користити потпуно равноправно.

Пример. Наћи тангенту хиперболе $y = \frac{3}{x}$ у тачки $(\overset{x_0}{3}, \overset{y_0}{1})$.

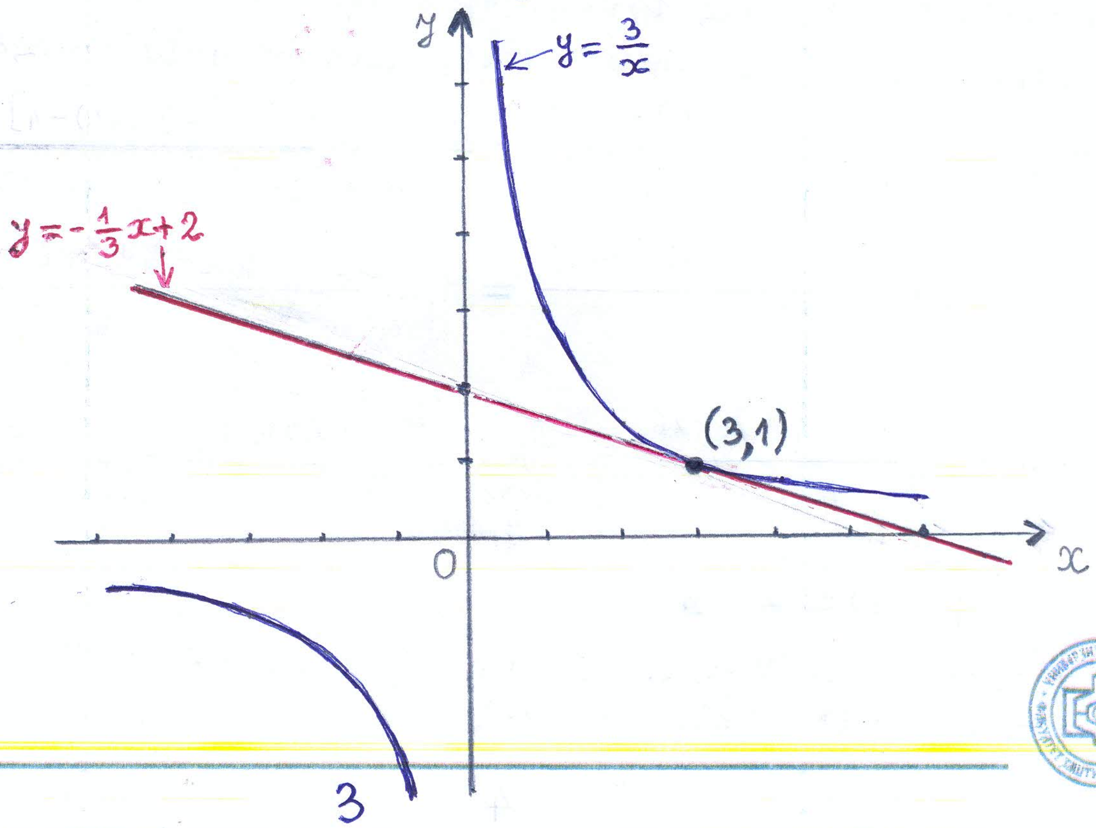
Тангента има једначину $y = kx + n$. Пошто тангента садржи тачку $(3,1)$ онда је $\boxed{1 = 3k + n}$ ... (1) Сада ћемо наћи k, а онда ћемо из једначине (1) израчунати n. Како је $f(x) = \frac{3}{x}$ и $f(x_0) = f(3) = 1$, онда имамо

$$k = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{\frac{x - 3}{1}} = \lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{x(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x - 3)}{x(x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{3}; \quad \boxed{k = -\frac{1}{3}}; \quad 1 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + n, \quad 1 = -1 + n, \quad \boxed{n = 2}.$$

Једначина тангенте је $y = -\frac{1}{3}x + 2$.



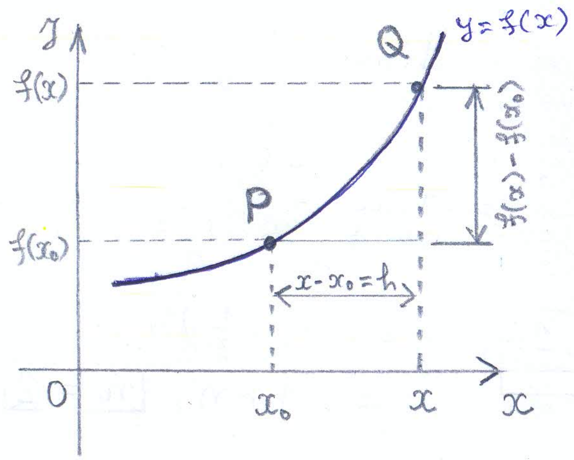
• Дефиниција извода:

Нека је функција $y=f(x)$ дефинисана на интервалу (a,b) и нека $x_0\in(a,b)$. Извод функције f у тачки x_0 означава се са $f'(x_0)$ и дефинисан је са:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \quad \dots(Д1)$$

Ако ставимо $x-x_0=h$, онда је $x=x_0+h$. Такође, $x\to x_0$ је исто што и $h\to 0$. Дефиницију извода је могуће записати и на следећи начин:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \quad \dots(Д2)$$



$$\underbrace{h=x-x_0}$$

Прираштај аргумента

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)}$$

Прираштај функције f у тачки x_0 који одговара прираштају аргумента h.

Пример. Наћи извод функције $f(x)=5x^2+3x-1$ у тачки 2.
Ставићемо $x_0=2$. Применићемо дефиницију извода (Д2).

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[5(2+h)^2+3(2+h)-1]-[5\cdot 2^2+3\cdot 2-1]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot(4+4h+h^2)+6+3h-1-25}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{20+20h+5h^2+6+3h-1-25}{h}=$$

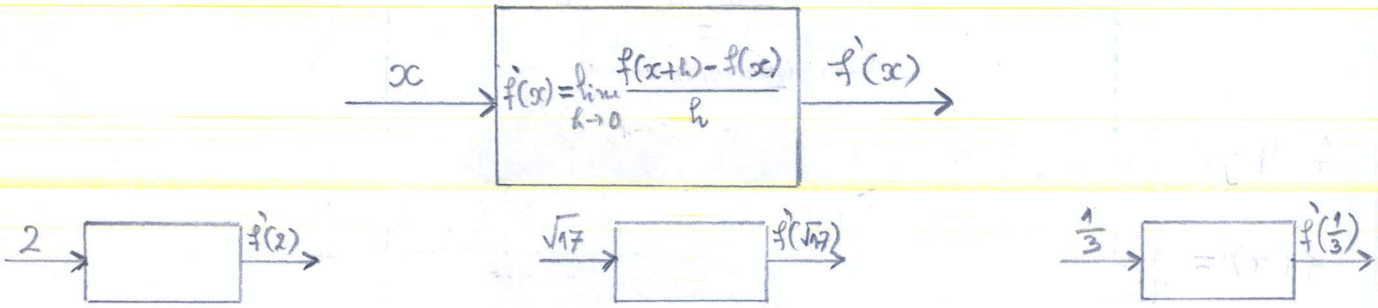
$$=\lim_{h\to 0}\frac{5h^2+23h+26-26}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h^2+23h}{h}=\lim_{h\to 0}(5h+23)=23.$$

$$f'(2)=23 \blacksquare$$

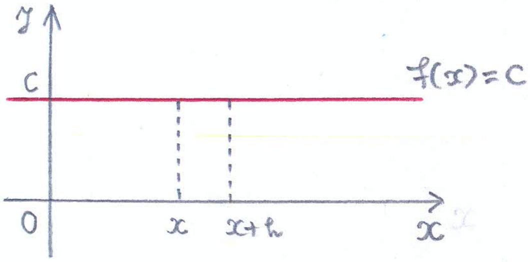
• Функција f је диференцијабилна у тачки x_0 ако постоји извод $f'(x_0)$.

Геометријска интерпретација извода: Извод $f'(x_0)$ је коефицијент правца тангенте на график функције f у тачки $(x_0, f(x_0))$.

У претходном примеру тражили смо извод функције f у тачки 2. Као резултат, добили смо број $f'(2) = 23$. Извод смо могли да тражимо и у некој другој тачки – као резултат добили бисмо неки други број. Генерално, извод у тачки x је $f'(x)$. Извод је функција која броју x придружује извод у тој тачки.



1° Константна функција $f(x) = c$



$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0;$$

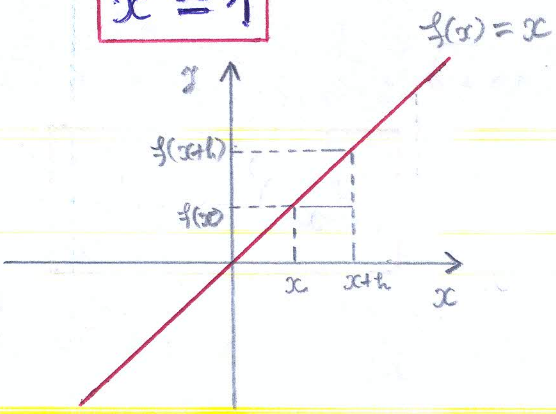
$$\boxed{c' = 0}$$

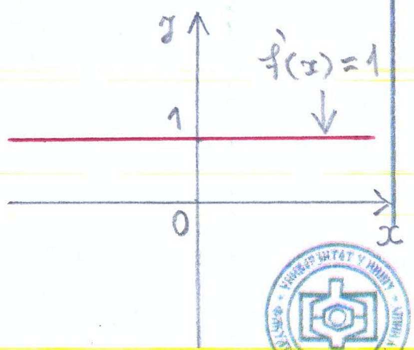
2° Линеарна функција $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

$$\boxed{x' = 1}$$





3° Функција $f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

$$\boxed{(x^2)'=2x}$$

4° Функција $f(x)=x^3$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

$$\boxed{(x^3)'=3x^2}$$

Генерално:

$$\boxed{(x^n)'=n\cdot x^{n-1},\quad n\in\mathbb{N}}$$

5° Функција $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Приметимо да је функција $f(x)=\sqrt{x}$ дефинисана за $x\geq 0$, док је функција $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (извод) дефинисана за $x>0$.

6° Експоненцијална функција $f(x)=e^x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x\cdot 1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}_{1}=e^x\cdot 1=e^x$$

$$\boxed{(e^x)'=e^x}$$

7° Функција $f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\overbrace{(x+h)}^{\alpha}-\sin\overbrace{x}^{\beta}}{h}$$

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$\alpha=x+h,\ \beta=x$

$\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{h}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2}=x+\frac{h}{2}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\cos x}=$$

$$=1\cdot\cos x=\cos x$$

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x}$$

8° Функција $f(x)=\cos x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\overbrace{(x+h)}^{\alpha}-\cos\overbrace{x}^{\beta}}{h}$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{x+h+x}{2}=\frac{2x+h}{2}=x+\frac{h}{2}$

$\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{x+h-x}{2}=\frac{h}{2}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=$$

$$=-\underbrace{\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\sin x}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1}=-\sin x$$

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

* Правила диференцирања

1° Нека је c константа и нека функција f има извод у тачки x. Тада важи:

$$\boxed{(c\,f(x))' = c\,f'(x)}.$$

Доказ. Нека је $g(x) = c\,f(x)$.

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-c\,f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c\cdot\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\,f'(x).$$

Пример. (а) $(3x^4)' = 3\cdot(x^4)' = 3\cdot 4\cdot x^3 = 12x^3$. У овом примеру је $c=3$, $f(x)=x^4$; ми тражимо извод функције $g(x) = c\,f(x) = 3x^4$.

(б) $(-x)' = ((-1)\cdot x)' = (-1)\cdot x' = (-1)\cdot 1 = -1$; $c=-1$, $f(x)=x$.

2° Нека функције f и g имају извод у тачки x. Тада и функција $f+g$ има извод у тачки x, и при томе важи:

$$\boxed{(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)}.$$

Доказ. Ставићемо $F(x) = f(x)+g(x)$. Тада је

$$(f(x)+g(x))' = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}+\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

Ово правило се може проширити на збир три или више функција.

$$(f(x)+g(x)+h(x))' = (\underbrace{(f(x)+g(x))}+\underbrace{h(x)})' = (f(x)+g(x))' + h'(x) =$$

$$= f'(x)+g'(x)+h'(x).$$

3° Нека функције f и g имају извод у тачки x. Тада и функција $f-g$ има извод у тачки x, и при томе важи:

$$\boxed{\left(f(x)-g(x)\right)'=f'(x)-g'(x)}$$

Доказ: $(f(x)-g(x))' = \left(f(x)+(-g(x))\right)' = f'(x)+(-g(x))' =$
$= f'(x)+((-1)g(x))' = f'(x)+(-1)g'(x) = f'(x)+(-g'(x)) = f'(x)-g'(x)$.

Пример. $(x^8+12x^5-4x^4+10x^3-6x+5)' = (x^8)'+(12x^5)'-(4x^4)'+$
$+(10x^3)'-(6x)'+5' = 8x^7+12\cdot(x^5)'-4\cdot(x^4)'+10\cdot(x^3)'-6\cdot x'+0 =$
$= 8x^7+12\cdot 5\cdot x^4-4\cdot 4\cdot x^3+10\cdot 3\cdot x^2-6\cdot 1 = 8x^7+60x^4-16x^3+30x^2-6$.

4° Пре него што искажемо следеће правило диференцирања, потребан нам је овај резултат.

* Нека функција f има извод у тачки x_0. Тада је
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \quad \ldots\ldots (A)$$

Функцију $f(x)$ можемо за $x\neq x_0$ трансформисати на следећи начин:

$$f(x) = f(x)-f(x_0)+f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0).$$

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Дефинисана је у тачки } x_0} = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)}_{\text{Није дефинисана у тачки } x_0}, \quad x\neq x_0$$

У осталим тачкама ове две функције имају исте вредности, па су њихови лимеси кад $x\to x_0$ међусобно једнаки.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)\right] =$$

Претпоставили смо да овај лимес постоји — његова вредност је коначан број $f'(x_0)$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right]+\lim_{x\to x_0} f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}^{0}+f(x_0) =$$
$$= f'(x_0)\cdot 0+f(x_0) = f(x_0); \text{ Дакле: } \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \blacksquare$$

Ако је функција f диференцијабилна у тачки x_0, онда је f и непрекидна у x_0.

Ово су исти искази

Нека функције f и g имају извод у тачки x_0. Тада и функција $f \cdot g$ има извод у тачки x_0, и при томе важи:

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)}$$

Ставићемо $F(x) = f(x)\,g(x)$.

$$(fg)'(x_0) = F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) \overbrace{- f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)} - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) \right] + \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} g(x)}_{(A)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} =$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Скраћено: $\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$ (Извод производа)

Пример. Наћи извод функције $y = x^2 \sin x$.

Наша функција је производ две функције - прва функција је $f(x) = x^2$, а друга функција је $g(x) = \sin x$.

$$\underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)}$$

$$(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x \blacksquare$$

5° **Извод количника**

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Пример. Наћи изводе следећих функција:

(а) $y = tg\, x$ (б) $y = ctg\, x$ (в) $y = \frac{1}{x}$.

(а) $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

$$(tg\, x)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

(б) $ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

$$(ctg\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\boxed{(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

(в) $y = \frac{1}{x}$, $f(x) = 1$, $g(x) = x$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{0 - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

*Извод сложене функције (Ова секција се може прескочити приликом првог читања)

Претпоставимо да желимо да нађемо извод функције $F(x)=\sqrt{x^2+1}$. Формуле које смо до сада установили не могу нам помоћи! Функција F је сложена функција. Посматрајмо функције $f(u)=\sqrt{u}$ и $g(x)=x^2+1$. Имамо:

$$f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x^2+1}=F(x),\ \text{тј.}$$

$$F(x)=f(g(x)).$$

Кажемо да је функција F композиција функција f и g.

$$x \xrightarrow{\ g\ } g(x) \xrightarrow{\ f\ } f(g(x)) = F(x)$$

$$\text{(Б)}\quad \boxed{F'(x)=f'(g(x))\,g'(x)} \leftarrow \text{Извод сложене функције}$$

Вратимо се сада функцији $F(x)=\sqrt{x^2+1}$. Записали смо је као $F(x)=f(g(x))$, где је $f(u)=\sqrt{u}$ и $g(x)=x^2+1$. Применићемо формулу за извод сложене функције.

$$f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}},\quad f'(g(x))=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}};$$

$$g'(x)=(x^2+1)'=(x^2)'+1'=2x$$

$$F'(x)=f'(g(x))\,g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Добили смо: $\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $F'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Да бисмо се уверили у исправност формуле (Б), наћи ћемо извод функције F помоћу дефиниције (Д2).

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\sqrt{(x+h)^2+1}}^{A}-\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{B}}{h}\cdot\frac{\overbrace{\sqrt{(x+h)^2+1}}^{A}+\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{B}}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2+1\right)-\left(x^2+1\right)}{h\left(\sqrt{x^2+2hx+h^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2+1-x^2-1}{h\left(\sqrt{x^2+2hx+h^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h\left(\sqrt{x^2+2hx+h^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{x^2+2hx+h^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\lim_{h\to 0}(2x+h)}{\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{x^2+2hx+h^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Добили смо исти резултат као и када смо применили формулу (Б). То значи да можемо веровати формули (Б), и ми ћемо је надаље користити. Приликом примене формуле (Б) веома је важно уочити шта је f, а шта је g.

Пример. Наћи изводе следећих функција:

(а) $y = \sin^2 x$ (б) $y = (x^3-1)^{100}$ (в) $y = x^2 e^{-x}$.

(а) $F(x) = \sin^2 x$, $f(u) = u^2$, $g(x) = \sin x$; $f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x$.
Даље, $F(x) = \sin^2 x = f(g(x))$; $f'(u) = 2u$, $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2\sin x$,
$g'(x) = \cos x$.

$$F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

$(\sin^2 x)' = 2\cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$; $(\sin^2 x)' = \sin 2x$.

Да не заборавимо: $\sin^2 x = (\sin x)^2$.

(б) $F(x) = (x^3-1)^{100}$, $f(u) = u^{100}$, $g(x) = x^3-1$, $f'(u) = 100\cdot u^{99}$,
$f'(g(x)) = f'(x^3-1) = 100\cdot(x^3-1)^{99}$, $g'(x) = (x^3-1)' = 3x^2$.

$((x^3-1)^{100})' = f'(g(x))\,g'(x) = 100\cdot(x^3-1)^{99}\cdot 3x^2 = 300x^2(x^3-1)^{99}$.

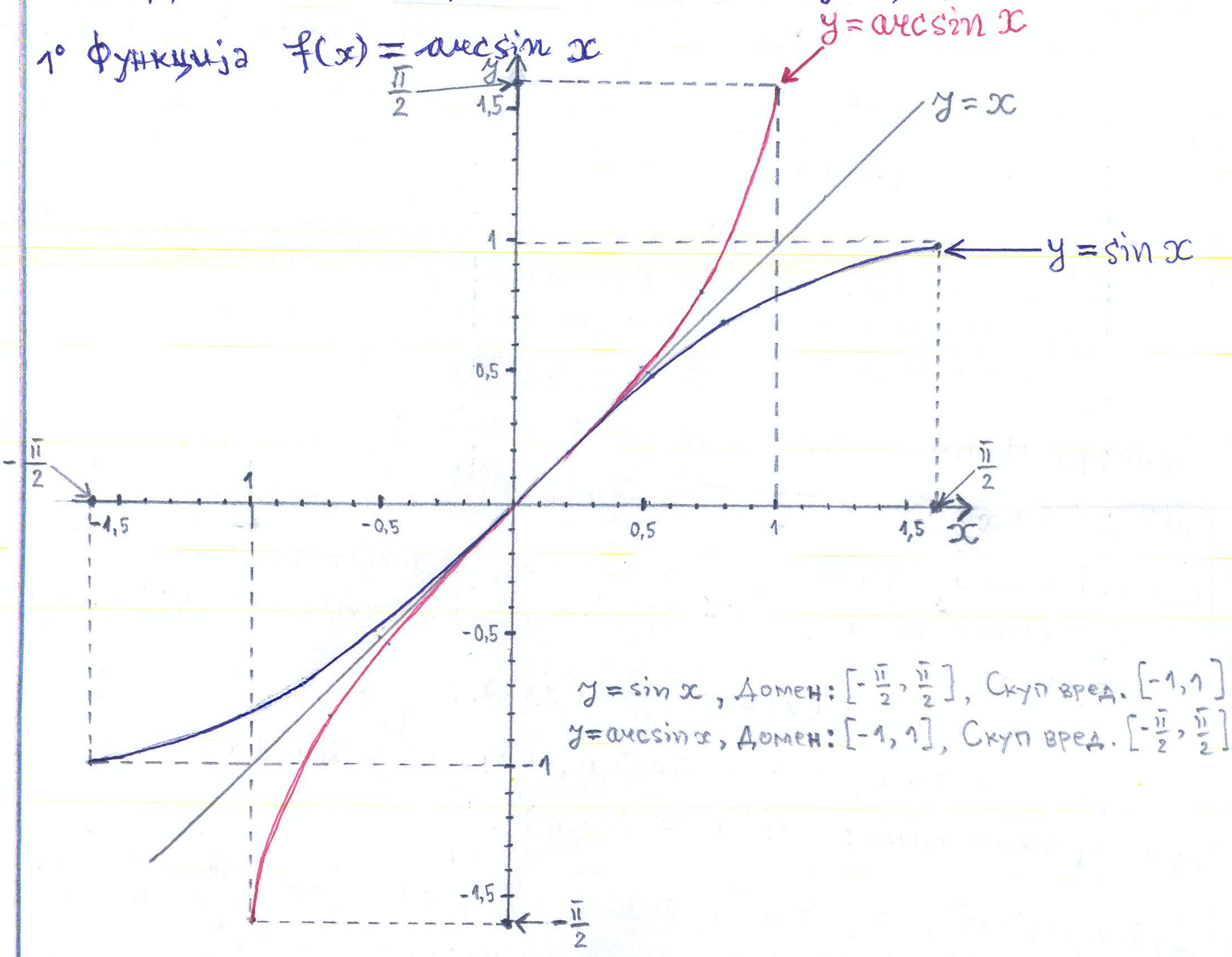
(в) $(x^2e^{-x})' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2\cdot(e^{-x})'$.
Функцију $F(x) = e^{-x}$ посматрамо као да је сложена функција.
$f(u) = e^u$, $g(x) = -x$, $f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{-x} = F(x)$.
$f'(u) = e^u$, $f'(g(x)) = f'(-x) = e^{-x}$, $g'(x) = (-x)' = (-1)x' = -1$
$(e^{-x})' = f'(g(x))\cdot g'(x) = e^{-x}\cdot(-1) = \boxed{-e^{-x}}$

$$(x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} =$$
$$= (2x - x^2)\cdot e^{-x}.$$

Напомена: Ову секцију читати после секције Извод сложене функције – Специјални случајеви 1.

* Изводи инверзних тригонометријских функција

1° Функција $f(x) = \arcsin x$



$y = \sin x$, Домен: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, Скуп вред. $[-1, 1]$

$y = \arcsin x$, Домен: $[-1, 1]$, Скуп вред. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

x	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0,52$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,8$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,6$	$-\frac{\pi}{6} \approx -0,52$	$-\frac{\pi}{4} \approx -0,8$	$-\frac{\pi}{2} \approx -1,6$
$y = \sin x$	0	0,5	0,7	1	-0,5	-0,7	-1

x	0	0,5	0,7	1	-0,5	-0,7	-1
$y = \arcsin x$	0	0,52	0,8	1,6	-0,52	-0,8	-1,6

$f(x) = \arcsin x$, $\underbrace{-\frac{\pi}{2} \le f(x) \le \frac{\pi}{2}}_{\cos[f(x)] \ge 0}$,

$\sin[f(x)] = x$,

$\cos[f(x)]\, f'(x) = 1$,

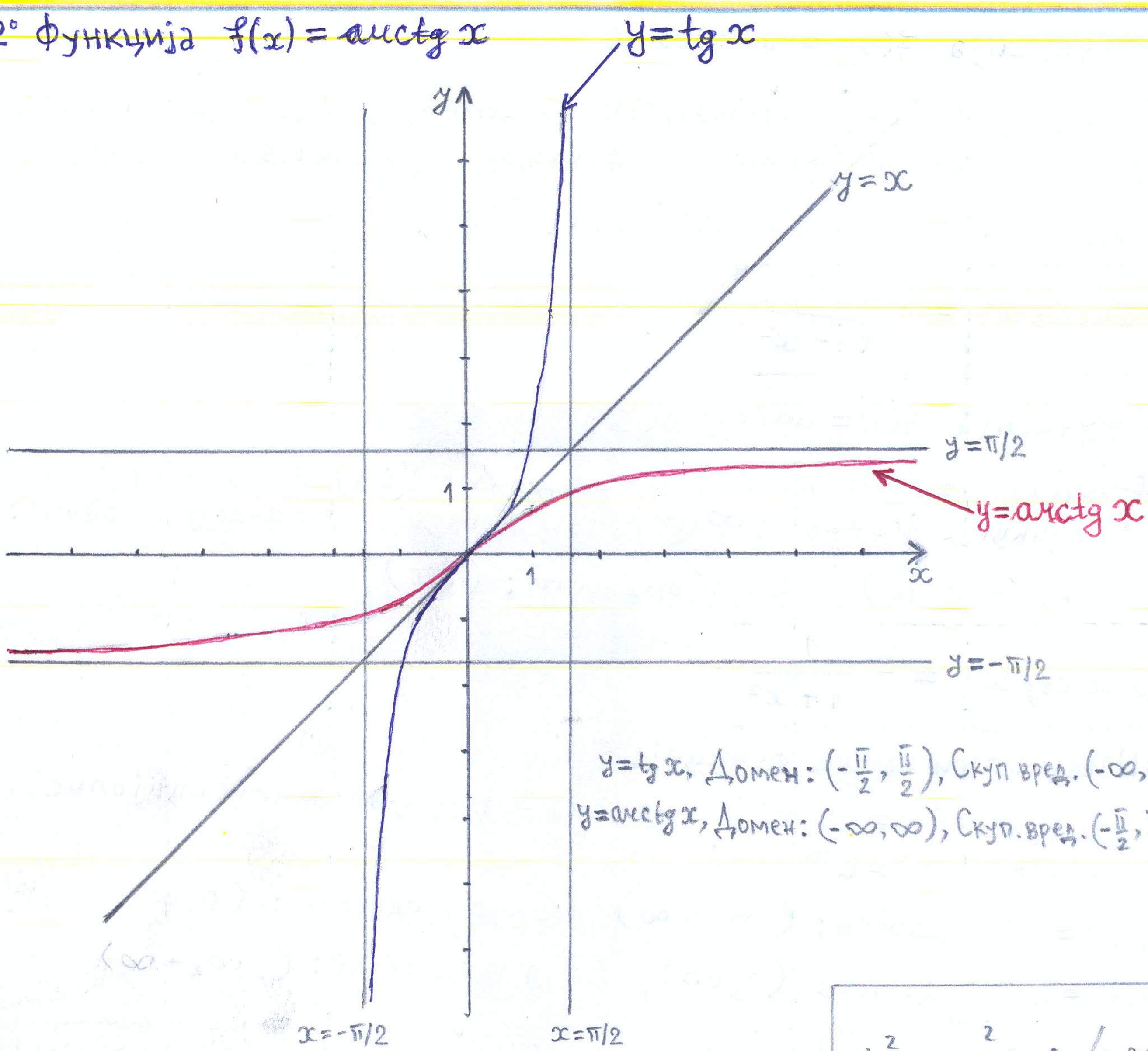
$f'(x) = \frac{1}{\cos[f(x)]}$;

$\sin^2[f(x)] + \cos^2[f(x)] = 1$

$\cos[f(x)] = \sqrt{1 - \sin^2[f(x)]} = \sqrt{1 - x^2}$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

2° Функција $f(x) = \operatorname{arctg} x$



$y = \operatorname{tg} x$, Домен: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, Скуп вред. $(-\infty, \infty)$

$y = \operatorname{arctg} x$, Домен: $(-\infty, \infty)$, Скуп. вред. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\frac{\pi}{4} \approx 0,8$	$\frac{5\pi}{12} \approx 1,3$	$-\frac{\pi}{4} \approx -0,8$	$-\frac{5\pi}{12} \approx -1,3$
$y = \operatorname{tg} x$	0	1	3,7	−1	−3,7

x	0	1	3,7	−1	−3,7
$y = \operatorname{arctg} x$	0	0,8	1,3	−0,8	−1,3

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;/ : \cos^2\alpha$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{tg}[f(x)] = x$$

$$\frac{1}{\cos^2[f(x)]} f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \cos^2[\underbrace{f(x)}_{\alpha}]$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2[f(x)]} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}[f(x)] \cdot \operatorname{tg}[f(x)]}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x \cdot x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

3° Функција $f(x) = \arccos x$

Функцију $y = \cos x$ посматрамо на домену $[0, \pi]$. Тада је скуп вредности једнак $[-1, 1]$. За функцију $y = \arccos x$ важи:

Домен: $[-1, 1]$, Скуп вредности: $[0, \pi]$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

4° Функција $f(x) = \operatorname{arcctg} x$

Функцију $y = \operatorname{ctg} x$ посматрамо на домену $(0, \pi)$. Тада је скуп вредности функције једнак $(-\infty, \infty)$. За функцију $y = \operatorname{arcctg} x$ важи:

Домен: $(-\infty, \infty)$, Скуп вредности: $(0, \pi)$

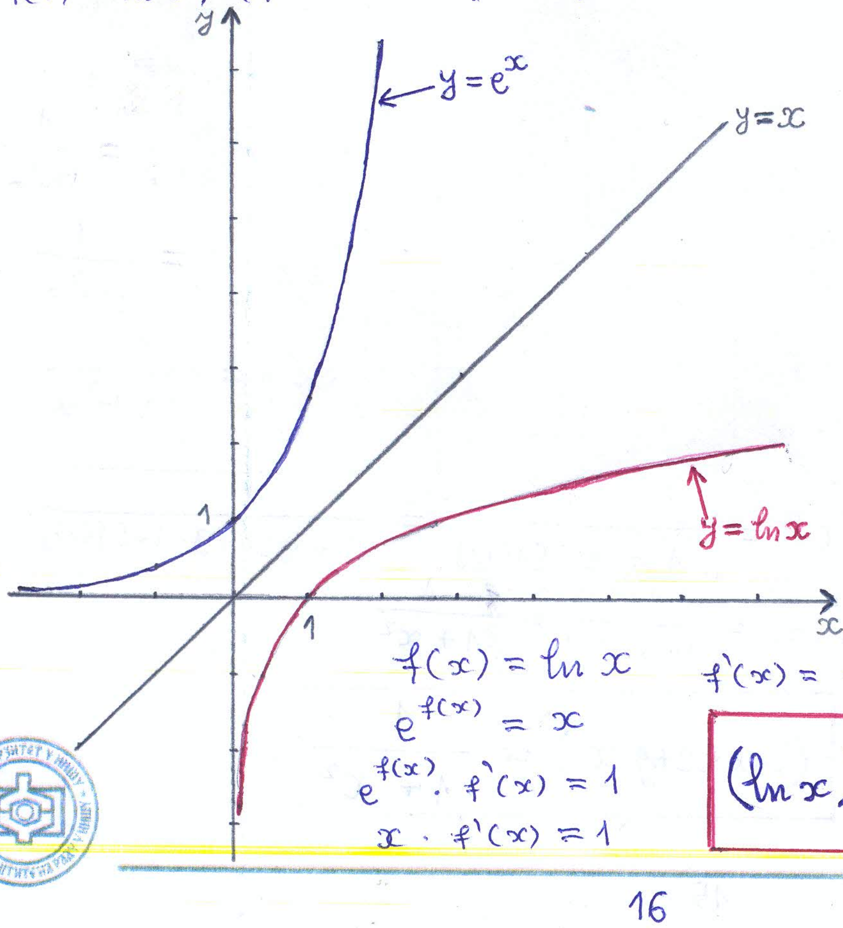
$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

* Извод логаритамске функције

Функција $f(x) = \ln x$ је инверзна функција експоненцијалне функције $f(x) = e^x$.

$f(x) = e^x$, Домен: $(-\infty, +\infty)$, Скуп вредности: $(0, \infty)$

$f(x) = \ln x$, Домен: $(0, \infty)$, Скуп вредности: $(-\infty, +\infty)$



x	-2	-1	0	1	2
$y=e^x$	0,15	0,4	1	2,72	7,4

x	0,15	0,4	1	2,72	7,4
$y=\ln x$	-2	-1	0	1	2

$$\boxed{\ln x = y, \quad e^y = x}$$

$$f(x) = \ln x$$
$$e^{f(x)} = x$$
$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1$$
$$x \cdot f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

ТАБЛИЦА ИЗВОДА

ФУНКЦИЈА	ИЗВОД	ФУНКЦИЈА	ИЗВОД
$y=c$	$c'=0$	$y=\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$
$y=x$	$x'=1$	$y=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$y=x^2$	$(x^2)'=2x$	$y=\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	$y=\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$y=\frac{1}{x}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$y=\arcsin x$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\arccos x$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=e^x$	$(e^x)'=e^x$	$y=\operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=\ln x$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$y=\operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Извод сложене функције

-Специјални случајеви I-

• n је реалан број

$$\boxed{\left(\left(f(x)\right)^n\right)' = n\cdot\left(f(x)\right)^{n-1}\cdot f'(x)} \text{ ······(П1)}$$

Подсетник: $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)} \text{ ······(П2)}$$

Подсетник: $(e^x)' = e^x$

Напомена: Ово правило се може добити из (П1) стављањем $n=1/2$.

$$\boxed{\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)} \text{ ······(П3)}$$

Подсетник: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\boxed{\left(\sin f(x)\right)' = \cos f(x)\cdot f'(x)}$$

(П4)

Подсетник: $(\sin x)' = \cos x$

$$\boxed{\left(\cos f(x)\right)' = -\sin f(x)\cdot f'(x)}$$

(П5)

Подсетник: $(\cos x)' = -\sin x$

$$\boxed{\left(\mathrm{tg}\, f(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)}$$

(П6)

Подсетник: $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\boxed{\left(\mathrm{ctg}\, f(x)\right)' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)}\cdot f'(x)}$$

(П7)

Подсетник: $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Пример. Наћи извод функције:

(а) $f(x) = e^{\sin x}$

$$f'(x) = \left(e^{\sin x}\right)' \overset{(\Pi 2)}{=} e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

(б) $f(x) = (1-5x)^4$

$$f'(x) = \left((1-5x)^4\right)' \overset{(\Pi 1)}{=} 4\cdot(1-5x)^3 \cdot (1-5x)' = 4\cdot(1-5x)^3\cdot\left(1' - (5x)'\right) =$$

$$= 4\cdot(1-5x)^3\cdot(0-5\cdot x') = 4\cdot(1-5x)^3\cdot(0-5\cdot 1) = 4\cdot(1-5x)^3\cdot(-5)$$

$$= -20\cdot(1-5x)^3.$$

(в) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

Напомена: Овај задатак радити после секције Извод сложене функције - Специјални случајеви II.

$$f'(x) = \left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' \overset{(\Pi 12)}{=} \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}_{\text{Извод количника}} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1\cdot(1-x) - (1+x)\cdot(-1)}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)\cdot(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}.$$

(г) $f(x) = \sin(2x+3)$

$$f'(x) = \left(\sin(2x+3)\right)' \overset{(\Pi 4)}{=} \cos(2x+3)\cdot(2x+3)' = \cos(2x+3)\cdot\left((2x)' + 3'\right)$$

$$= \cos(2x+3)\cdot(2\cdot x') = \cos(2x+3)\cdot 2 = 2\cdot\cos(2x+3).$$

(д) $f(x) = \operatorname{tg} ax$, $a \in \mathbb{R}$ - константа

$$f'(x) = \left(\operatorname{tg}(ax)\right)' \overset{(\Pi 6)}{=} \frac{1}{\cos^2 ax}\cdot(ax)' = \frac{a}{\cos^2 ax}.$$

(ђ) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)' = \left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/2}\right)' \overset{(\Pi 1,\, n=\frac{1}{2})}{=} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}_{\text{Извод количника}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{x'(x+1) - x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{x^{1/2}}{(x+1)^{1/2}}\cdot(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(x+1)^{2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)^{3/2}}.$$

Извод сложене функције

– Специјални случајеви II –

$$\boxed{(\arcsin f(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)} \quad (\Pi 8)$$

Подсетник: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{(\arccos f(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)} \quad (\Pi 9)$$

Подсетник: $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{(\mathrm{arctg}\, f(x))' = \frac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)} \quad (\Pi 10)$$

Подсетник: $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\boxed{(\mathrm{arcctg}\, f(x))' = -\frac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)} \quad (\Pi 11)$$

Подсетник: $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\boxed{(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)} \cdots\cdots (\Pi 12)$$

Подсетник: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Напомена: Ову и наредну страницу читати после секција *Извод инверзних тригонометријских функција* и *Извод логаритамске функције* (14, 15. и 16. страница).

Пример. Наћи извод функције:

(а) $f(x)=x\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

$$f'(x)=\overbrace{(x\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x})'}^{\text{Извод производа}}=x'\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}+x\cdot\overbrace{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'}^{\text{Применити (П10)}}=$$

$$=\operatorname{arctg}\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'=\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}.$$

(б) $f(x)=\arcsin(2x+1)$

$$f'(x)=(\arcsin(2x+1))'\overset{(П8)}{=}\frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}\cdot(2x+1)'=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-(4x^2+4x+1)}}=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2-4x-1}}=\frac{2}{\sqrt{-4x^2-4x}}=\frac{2}{\sqrt{4(-x^2-x)}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{-x^2-x}}=\frac{1}{\sqrt{-x^2-x}}.$$

(в) $f(x)=\ln(x^3+1)$

$$f'(x)=(\ln(x^3+1))'\overset{(П12)}{=}\frac{1}{x^3+1}\cdot(x^3+1)'=\frac{3x^2}{x^3+1}$$

(г) $f(x)=\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

$$f'(x)=\left(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)'\overset{(П12)}{=}\frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\cdot\overbrace{\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)'}^{\text{Извод количника}}=\frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'\sqrt{x-2}-(x+1)\overbrace{(\sqrt{x-2})'}^{(П3)}}{(\sqrt{x-2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x-2}-(x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(x-2)'}{x-2}=\frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}(x+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x-2}}}{x-2}$$

$$=\frac{\sqrt{x-2}\cdot\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}(x+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)}{(x+1)(x-2)}=\frac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}\cdot\frac{1}{2}(x+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x-2}}}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{(x+1)(x-2)}=\frac{\frac{x}{2}-\frac{5}{2}}{(x+1)(x-2)}=\frac{\frac{x-5}{2}}{\frac{(x+1)(x-2)}{1}}=$$

$$=\frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}.\ \blacksquare$$

• Други извод функције

Већ смо видели да уколико је f функција, онда је њен извод (кажемо још и први извод) f' такође једна функција чији извод можемо израчунати. Извод првог извода f', у ознаци f'', је **ДРУГИ ИЗВОД** функције f.

Пример. Ако је $f(x) = x^3 - x$, наћи $f''(x)$.

$\boxed{f(x) = x^3 - x} \leftarrow$ Полазна функција

$f'(x) = (x^3 - x)' = (x^3)' - x'$; $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 1} \leftarrow$ Први извод

$f''(x) = (3x^2 - 1)' = (3x^2)' - 1' = 3\cdot(x^2)' = 3\cdot 2x$; $\boxed{f''(x) = 6x}$

Други извод

• Нотација

Ако користимо традиционални запис $y = f(x)$ да бисмо нагласили да је x независна променљива и да је y зависна променљива, онда се извод функције f може написати и на следећи начин:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \dot{y} \, .$$

Симбол $\frac{dy}{dx}$ је увео Лајбниц.

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$\leftarrow$ Лајбницова нотација за други извод

У физици се често као независна променљива јавља време t, а зависне променљиве су пређени пут s, брзина v, убрзање a.

Следи да се срећемо са функцијама:

$s = f(t)$ $\quad v = f(t)$ $\quad a = f(t)$.

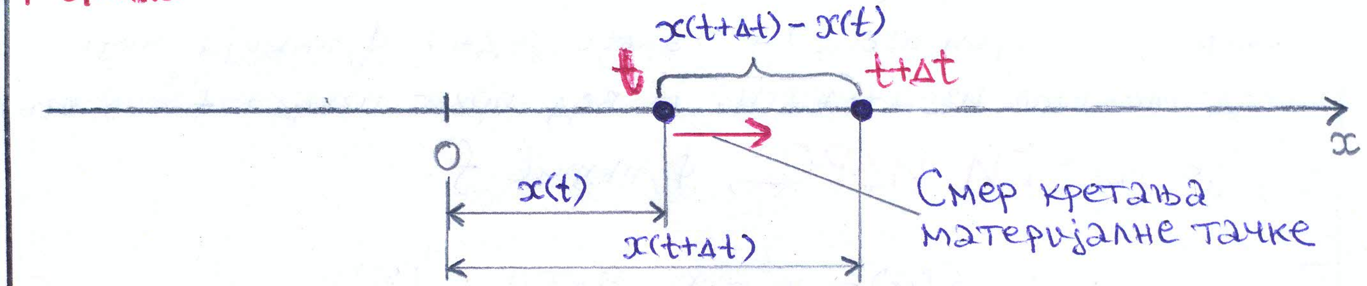
Често се пише и овако: $s = s(t)$, $v = v(t)$, $a = a(t)$. Први и други извод ових функција записујемо овако:

$\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2 s}{dt^2}$ $\quad \frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2 v}{dt^2}$ $\quad \frac{da}{dt}$, $\frac{d^2 a}{dt^2}$

- ПРИМЕНА ИЗВОДА -

• Брзина и убрзање материјалне тачке

1° Брзина



- Посматрајмо материјалну тачку која се креће по правој линији (x оса). Положај материјалне тачке на оси је одређен функцијом $x=x(t)$. Симбол t означава време - независна променљива, док је x координата материјалне тачке - зависна променљива. У тренутку t материјална тачка има координату $x(t)$. Симбол Δt („делта те") означава малу промену времена. Раније смо за мале промене користили слово h, али у физици је уобичајено да се користи Δt (када се ради о промени времена).

- Средња брзина током периода Δt:

$$\text{Средња брзина} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

- Тренутна брзина у тренутку t: Рачунамо средње брзине на све краћим и краћим временским интервалима Δt. Другим речима, посматрамо количник $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ када Δt има малу вредност, тј. када $\Delta t \to 0$.

Тренутна брзина $v(t)$ у тренутку t је дата следећим лимесом:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

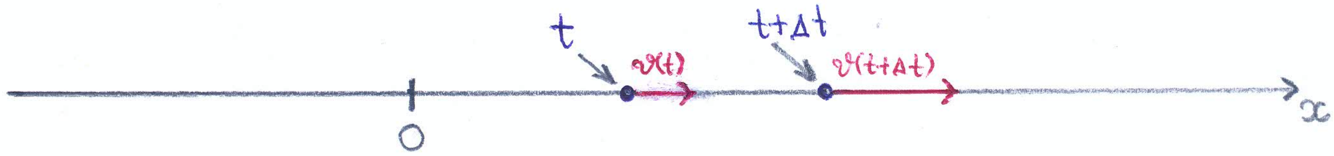
Ако се сада сетимо дефиниције (Д2), лако је видети да горњи лимес представља извод функције x у тачки t:

Тренутна брзина $\rightarrow$ $$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$$

Некада се положај материјалне тачке описује функцијом $s=s(t)$ (уместо слова „x" пише се слово „s"). У том случају имамо:

Тренутна брзина $\rightarrow$ $$\boxed{v(t) = \frac{ds}{dt}}$$

2° Убрзање



Убрзање → $$\boxed{a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}}$$

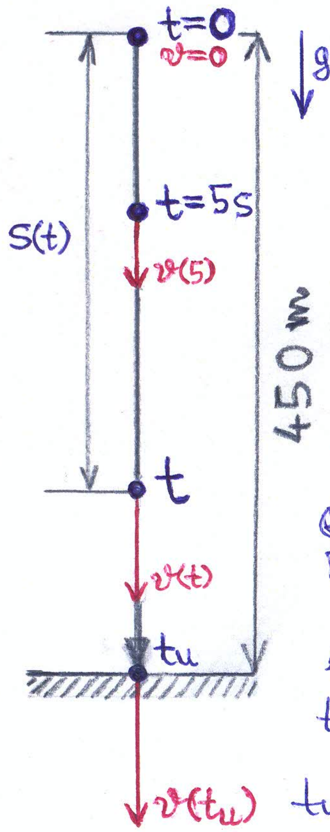
Како је убрзање први извод брзине, а брзина је први извод функције положаја, излази да је убрзање материјалне тачке једнако другом изводу функције положаја. Имамо:

$$\boxed{a(t)=\frac{d^2x}{dt^2}} \quad \text{или} \quad \boxed{a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}}\,.$$

Пример. Тело пада са висине од 450 m без почетне брзине (слободан пад).

(а) Колика је брзина тела после 5 секунди?

(б) Колика је брзина тела у тренутку удара у земљу?



$s(t)$ је пређени пут од почетка кретања ($t=0$) до тренутка t, али уједно то је и функција положаја тела.

Закон слободног пада: $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$.

$g=9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, па је $\frac{1}{2}g\approx 4{,}9\,\frac{m}{s^2}$. Имамо:

$$\boxed{s(t)=4{,}9t^2}.$$

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=(4{,}9t^2)'=4{,}9(t^2)'=4{,}9\cdot 2\cdot t\ ;$$

$\boxed{v(t)=9{,}8t}$. (а) $v(5)=9{,}8\cdot 5=49\,\frac{m}{s}$.

(б) Треба наћи тренутак t_u удара тела у земљу. Пређени пут тела тада износи 450 m, тј.

$$s(t_u)=450\ m.$$

$$4{,}9t_u^2=450$$

$$t_u^2=\frac{450}{4{,}9}$$

$$t_u=\sqrt{\frac{450}{4{,}9}}\approx 9{,}6\,s$$

$$v(t_u)=9{,}8\cdot 9{,}6$$

$$v(t_u)\approx 94\,\frac{m}{s}$$